SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DE VERACRUZ
SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR Y SUPERIOR
DIRECCIÓN GENERAL DE TELEBACHILLERATO.

NOVENA OLIMPIADA DE LA CIENCIA FASE ZONAL 2013

MATEMATICAS

HOJA DE CLAVES DE RESPUESTA

1. Tenemos que $\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{x}} \leq 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 \leq 4 \Leftrightarrow x+2+\frac{1}{x} \leq 4 \Leftrightarrow x+\frac{1}{x} \leq 2,$

de donde se sigue que $x^2-2x+1=(x-1)^2 \leq 0.$ Como el cuadrado de todo número real es mayor o igual que cero, tenemos que $(x-1)^2=0$ y por lo tanto, $x=1$ es la única solución.

2. La descomposición en primos de 396 es $396=2^2\times 3^2\times 11.$ Como la suma de las edades es 23, los tres hermanos tienen menos de 23 años, así que uno de ellos tiene que tener 11 años. Las otras dos edades tienen que ser números menores que $23-11=12,$ así que pueden ser 4 y 9, o 6 y 6. En ambos caos, la edad de Juan sería 11 años.

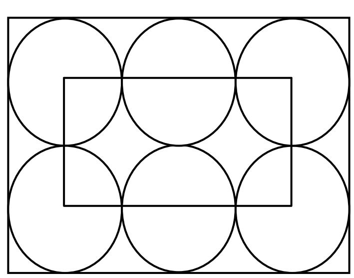
Finalmente, observamos que las hermanas de Juan tienen 6 años cada una, ya que si tomamos la suma de las dos posibilidades tenemos que

$11+4+9=24$ $11+6+6=23.$

3. Sea r la medida del radio de las circunferencias. Observemos que el perímetro del rectángulo chico (P_{ch}) puede calcularse en función de r,

$$P_{ch}=2r+2r+4r+4r=12r=60\text{ cm},$$

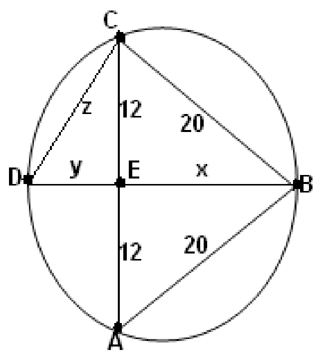
De donde se sigue que $r=5$ cm.



Como también podemos calcular el perímetro del rectángulo grande (P_g) en función de r, obtenemos

$$P_g = 4r + 4r + 6r + 6r = 20r = 20(5) = 100 \text{ cm.}$$

4. Sea D el punto diametralmente opuesto a B, E la intersección de CA con BD y sean x, y e z las longitudes de los segmentos BE, DE y DC, respectivamente.

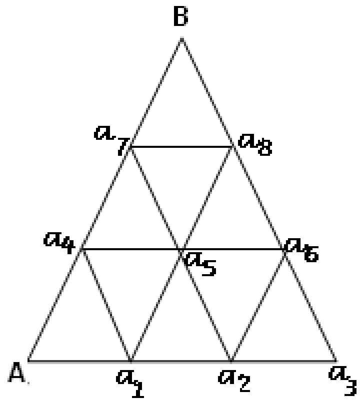


Por el Teorema de Pitágoras en el triángulo BCE tenemos que $x = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ cm. Como BD es diámetro, el triángulo BCD es un triángulo rectángulo y por simetría el triángulo ECD también lo es. De aquí obtenemos las ecuaciones,

$$20^2 + z^2 = (y+16)^2 \quad \text{y} \quad y^2 + 12^2 = z^2$$

Desarrollando y restando estas ecuaciones llegamos a $400 = 112 + 32y$ de donde $y = 9$ cm y $z = 15$ cm. Por lo tanto, el diámetro mide $x + y = 16 + 9 = 25$ cm.

5. Una manera de contar los caminos es contar los caminos a cada vértice (o intersección) y luego ir sumando. Numeremos los vértices (el del centro es a_5):



A cada vértice podemos llegar a lo más desde tres direcciones: horizontalmente desde su izquierda, desde abajo a la derecha o desde abajo a la izquierda. Observemos primero que para llegar a a_1, a_2 o a_3 tenemos un solo camino (el horizontal). Para llegar a a_4 hay dos caminos: el camino directo desde A y el que pasa por a_1. Para contar los caminos que llegan a a_5 tenemos que sumar los que pasan por a_4, más los que pasan por a_1, más los que pasan por a_2. Luego, hay 2 + 1 + 1 = 4 caminos de A a a_5.

Continuando este proceso tenemos que de A a:

- a_6 hay 6 caminos;
- a_7 hay 6 caminos;
- a_8 hay 16 caminos;
- B hay 22 caminos.

6. Como el dinero de Paty se incrementaría si se intercambiaran sus monedas de 5 centavos por las de 10 centavos, ella debe tener más monedas de 5 centavos que de 10 centavos. Al intercambiar una moneda de 5 centavos por una de 10 centavos, su dinero se aumenta en 5 centavos, de modo que ella tiene $\frac{70}{5}=14$ monedas más de 5 centavos que de 10 centavos. Por lo tanto, Paty tiene $\frac{1}{2}(20-14)=3$ monedas de 10 centavos y $20-3=17$ monedas de 5 centavos, es decir, en total tiene $3(10)+17(5)=115$ centavos o $1.15.